



[부록] 진화전략에 숨어있는 학교수학의 개념과 원리

우리가 인공지능에 활용되는 많은 전략들 중에 진화전략을 서울대학교 영재센터의 코딩수학 탐구에 선택한 이유는 진화전략의 폭넓은 적용사례와 효용성 때문도 있지만, 무엇보다도 학생들로 하여금 실제 우리생활을 이롭게 하고 세상을 변화시키고 있는 멋진 전략들 뒤에는 사실 대부분의 경우 수학적 아이디어가 담겨있음을 체험시켜보고자 하는 것이다. 구체적으로, 유전 및 진화전략 알고리즘에는 학교수학의 개념과 원리로 접근이 가능하고, 특히 미분과 확률통계가 서로 연결되어 있음을 보여주는 다음과 같은 핵심적인 수식을 고등학교 수준에서 최대한 스토리텔링으로 접근하며 코딩과 수학이 융합된 AI 코딩수학을 체험시킬 수 있다.

$$f'(x) \approx \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E}_{\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)} \varepsilon f(x + \varepsilon)$$

여기서 중요한 것이 고등학교 미분이 다루는 경사 gradient를 확률과 통계로 근사할 수 있다는 것이다. 이제 다소 부족할 수 있겠으나 영재센터 사사탐구반에서 진화전략에 숨어있는 수학적 원리를 학교수학의 수준에서 아래와 같이 정리하며 가급적 학교수학의 수준에서 스토리텔링하며 탐구한 과정을 소개한다.

$$f(x + \varepsilon) \approx f(x) + f'(x)\varepsilon + \frac{f''(x)}{2!}\varepsilon^2 \quad (1)$$

$$\varepsilon f(x + \varepsilon) \approx f(x)\varepsilon + f'(x)\varepsilon^2 + \frac{f''(x)}{2!}\varepsilon^3, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \quad (2)$$

$$\mathbb{E}_{\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)} [\varepsilon f(x + \varepsilon)] \approx \mathbb{E}_{\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)} \left[f(x)\varepsilon + f'(x)\varepsilon^2 + \frac{f''(x)}{2!}\varepsilon^3 \right] \quad (3)$$

우선 위에서, 테일러 전개식 (1)은 고등학교 교육과정 외의 내용이기에 잘 알려진 사실로서 제시해보자 (고등학교 AP 및 심화수학의 내용). (1)의 양변에 ε 을 곱해주면 (2)의 식을 얻을 수 있고 (2)의 양변에 expectation을 취하면 (3)의 식을 얻게 된다. 여기서 우리가 다루었던 ε 은 $N(0, \sigma^2)$ 을 따랐기에 $E(\varepsilon) = 0$, $V(\varepsilon) = \sigma^2$ 이고 $V(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - \{E(\varepsilon)\}^2$ 임을 이용하여 $E(\varepsilon^2) = \sigma^2$ 임을 알 수 있다. 실제로 이 값들은 파이썬 print 명령어를 통해 확인할 수 있다. 다음으로 현재 수학교육과정에서는 이산확률변수 X 와 $aX + b$ 의 평균, 분산 및 표준편차를 다음과 같이 다루고 있다.

이산확률변수 X 의 기댓값(평균)

이산확률변수 X 의 기댓값(평균)은

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n$$

확률변수 $aX+b$ 의 평균과 분산 및 표준편차

확률변수 $aX+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)의 평균과 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

① 평균 $E(aX+b) = aE(X) + b$

② 분산 $V(aX+b) = a^2V(X)$

③ 표준편차 $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$

[그림 A] 교과서에 실려 있는 평균, 분산 및 표준편차 내용

고교 수학에서는 확률분포표와 함께 $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ 과 $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ 를 이용하여

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b)p_i = \sum_{i=1}^n ax_i p_i + bp_i \\ &= \sum_{i=1}^n ax_i p_i + \sum_{i=1}^n bp_i = a \sum_{i=1}^n x_i p_i + b \sum_{i=1}^n p_i \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

와 같이 서술하고 있다. 같은 방식으로

$$E(aX^2) = \sum_{i=1}^n ax_i^2 p_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i = aE(X^2)$$

임을 알 수 있다. 여기서 X 가 아닌 ε 을 다루고 있기에(for fixed x) 앞에서 얻었던 결과들인 $E(\varepsilon^2) = \sigma^2$, $E(a\varepsilon+b) = aE(\varepsilon) + b$, $E(a\varepsilon^2) = aE(\varepsilon^2)$ 임을 이용하여 (ㄷ)의 우변의 식 중 앞의 두 부분이 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\mathbb{E}[f(x)\varepsilon] = f(x)\mathbb{E}(\varepsilon) = 0 \quad (\because E(\varepsilon) = 0) \quad (\text{ㄴ})$$

$$\mathbb{E}[f'(x)\varepsilon^2] = f'(x)\mathbb{E}(\varepsilon^2) = \sigma^2 \cdot f'(x) \quad (\because E(\varepsilon^2) = \sigma^2) \quad (\text{ㄹ})$$

교과 역량 키우기+

연속확률변수의 확률분포를 알아보자!

문제 해결 수준 대도 및 실천

● 이산확률변수의 확률, 평균, 분산, 표준편차를 구하는 방법을 배웠다.
 이제 수학Ⅱ를 학습한 학생은 연속확률변수의 확률, 평균, 분산, 표준편차를 적분을 이용하여 다음과 같이 정의한다.

$a \leq x \leq b$ 의 모든 실수의 값을 가지는 연속확률변수 X 의 확률밀도함수 f 는 다음과 같은 성질이 있다.

(1) $f(x) \geq 0$
 (2) $\int_a^b f(x)dx = 1$

$a \leq x \leq b$ 의 모든 실수의 값을 가지는 연속확률변수 X 의 확률밀도함수가 f 일 때.

(1) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \quad (a \leq a \leq b \leq b)$

(2) $E(X) = \int_a^b xf(x)dx$

(3) $V(X) = \int_a^b (x-m)^2 f(x)dx \quad (m=E(X))$

(4) $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

[그림 B] 교과서에 실려 있는 적분을 이용한 연속확률변수의 평균, 분산 및 표준편차

이제 $\mathbb{E}\left[\frac{f''(x)}{2!}e^3\right]=0$ 을 알기 위해 다음을 살펴보자. 학생들은 고등학교 수학에서 확률밀도함수와 정규분포 및 표준정규분포, 표준정규분포의 확률밀도함수에 대하여 배우고 있다. 정규분포의 확률밀도함수 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ 에 $m=0, \sigma=1$ 을 대입한 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 가 표준정규분포의 확률밀도함수임을 수학교과서에서 다루고 있고, 이 함수는 $f(-x) = f(x)$ 를 만족하는 우함수임을 알 수 있다. 한편 [그림 B]에서와 같이

$$E(X) = \int_a^b xf(x)dx, \quad E(X^2) = \int_a^b x^2f(x)dx$$

임을 고등학교 수학교과서에서도 다루고 있으며, 표준정규분포의 확률밀도함수는 실수에서 정의되어 있으므로 $E(X^3) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3f(x)dx$ 가 성립한다.

또한 학생들은 고등학교 수Ⅱ에서

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 0 & (f \text{가 기함수 일 때}) \\ 2 \int_0^a f(x)dx & (f \text{가 우함수 일 때}) \end{cases}$$

임을 배우고 있다. 따라서 기함수 x^3 과 우함수 $f(x)$ 의 곱은 기함수이기에

$E(X^3) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x) dx = 0$ 을 유추할 수 있고, ε 에 대하여 표현하면 $\mathbb{E}(\varepsilon^3) = 0$ 이므로

$$\mathbb{E}\left[\frac{f''(x)}{2!}\varepsilon^3\right] = 0 \quad (\text{㉞})$$

임을 알 수 있다. 이로서 아래의 결론을 얻게 된다.

$$\mathbb{E}_{\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)}[\varepsilon f(x + \varepsilon)] \approx \mathbb{E}_{\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)}\left[f(x)\varepsilon + f'(x)\varepsilon^2 + \frac{f''(x)}{2!}\varepsilon^3\right]$$

$\leftarrow (\text{㉝}), (\text{㉞}) (\text{㉞})$

$$= \mathbb{E}[f'(x)\varepsilon^2]$$

$$= \sigma^2 f'(x)$$

$$\therefore f'(x) \approx \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E}_{\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)} \varepsilon f(x + \varepsilon)$$